ケーリー・ハミルトンの定理と覚え方

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$のとき下の等式が成り立つ。

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

この定理は,

行列Aについての多項式の次数を下げるときに威力を発揮する場合が多いが,

誤用の危険性があるので，次のように理解すること。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とすると,

$A^2-pA+qE=O$であるための必要十分条件は、

「$A=kE$のとき，$k^2-pk+q=0$となるような実数kが存在する」

または,

「$a+d=p,\quad ad-bc=q$」

である。

したがって,

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$であることは,

$A^2-pA+qE=O$であるための十分条件に過ぎない。

要するに

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とすると,

$$A^2-pA+qE=O \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=p, ad-bc=q \\ \text{または} \\ A=kE\text{のとき，}k^2-pk+q=0\text{となるような実数}k\text{が存在する。} \end{cases}$$

ケーリー･ハミルトンの定理の覚え方

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について、

$A\vec{x}=k\vec{x}, \vec{x}\neq\vec{0}$となるような$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$が存在するとき,

つまり，$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$を満たすベクトル$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$（$\vec{x}\neq\vec{0}$）が存在するとき,

kをAの固有値，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$を$k$に対する$A$の固有ベクトルという。

$A\vec{x}=k\vec{x}$（$\vec{x}\neq\vec{0}$）より，$(A-kE)\vec{x}=\vec{0}$（$\vec{x}\neq\vec{0}$）

ここで，$(A-kE)^{-1}$が存在すると仮定すると,

$(A-kE)^{-1}(A-kE)\cdot\vec{x}=(A-kE)^{-1}\vec{0}$ より，$\vec{x}=\vec{0}$ となり，仮定（$\vec{x}\neq\vec{0}$）に反する。

よって，

$(A-kE)^{-1}$ は存在しない。

すなわち

$\det(A-kE)=0$ （det は行列式，例：$\det A=ad-bc$）

$A-kE=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$ より，

$\det(A-kE)=(a-k)(d-k)-bc=k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$

ここで，

k を A，$ad-bc$ を $(ad-bc)E$，0 を O に置き換えると，

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

が得られる。

覚え方のまとめ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$A-kE=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$

このとき，

$\det(A-kE)=0$ ならば，$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$

k を A，$ad-bc$ を $(ad-bc)E$，0 を O に置き換えて，

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

例題

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

A の各成分が自然数のとき， $A^2-2A-8E=O$ を満たすとき、
$a+d$ と $ad-bc$ の値をすべて求めよ。
ただし， E は 2 次の単位行列である。

解

ケーリー･ハミルトンの定理より,
$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ・・・①
条件より,
$A^2-2A-8E=O$ ・・・②
①－② より、
$-(a+d-2)A+(ad-bc+8)E=O$
$\therefore (a+d-2)A=(ad-bc+8)E$ …③
(i)
$a+d-2\neq 0$ のとき
③より， $A=kE$ とおける。
これを②に代入すると,
$k^2E-2kE-8E=O$
$\therefore (k^2-2k-8)E=O$
$E\neq O$ より,
$k^2-2k-8=0$
$\therefore (k+2)(k-4)=0$
$\therefore k=-2,4$
$\therefore A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
よって， $(a+d, ad-bc)=(-4,4),(8,16)$
(ii)
$a+d-2=0$ のとき
③より， $O=(ad-bc+8)E$ $\therefore ad-bc+8=0$
よって， $(a+d, ad-bc)=(2,-8)$
(i) または (ii) より,
$(a+d, ad-bc)=(-4,4),(8,16),(2,-8)$